

Fonction du second degré

I Fonction polynôme du second degré

Définition :

Une fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a , b , et c des nombres réels et $a \neq 0$. Cette forme est appelée forme développée.

Exemple :

- La fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$ est une fonction du second degré avec $a = 3$; $b = -2$; $c = 7$
- La fonction g définie par $g(x) = x^2$ est une fonction du second degré avec $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$

II Représentation graphique

On appelle parabole la courbe représentative d'une fonction du second degré.

La parabole a pour équation $y = ax^2 + bx + c$

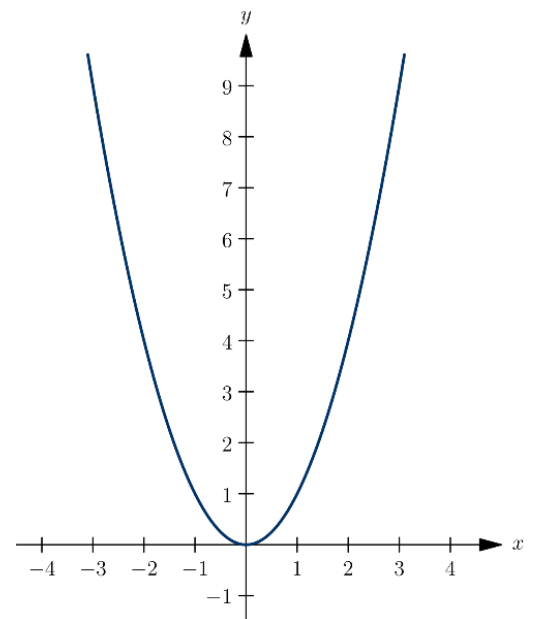
Exemple : Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2$

On détermine d'abord un tableau de valeurs de la fonction f , pour ensuite reporter ces valeurs dans un repère orthonormé.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Remarques :

- L'allure de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a .
Si $a > 0$, alors les branches de la parabole sont tournées vers le haut.
Si $a < 0$, alors les branches de la parabole sont tournées vers le bas.
- Le **sommet S** de la parabole est le point de la parabole d'abscisse $x = -\frac{b}{2a}$
- La courbe d'une fonction polynôme de second degré possède une **axe de symétrie**.



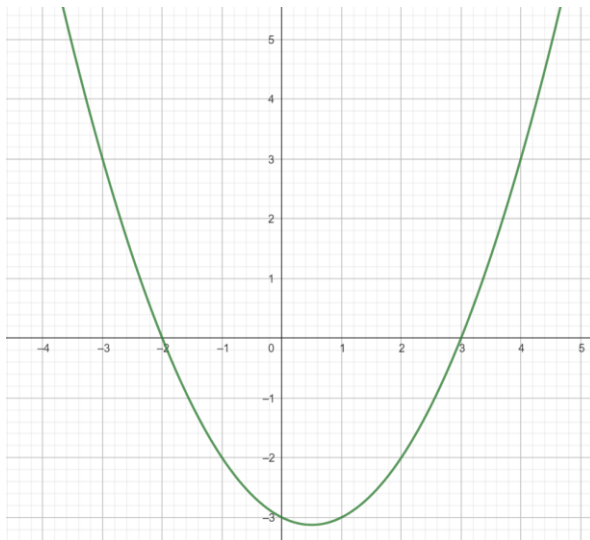
Application : Exercice 1

Propriété :

Soient a, x_1, x_2 des réels. La fonction f définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est une fonction polynôme du second degré. Cette écriture est la forme factorisée.

x_1 et x_2 sont appelées **racines** ou **solutions**. La parabole représentative de la fonction f coupe ainsi l'axe des abscisses aux valeurs x_1 et x_2

Exemple : Soit la fonction f définie par $f(x) = 0,5(x - 3)(x + 2)$



Application : Exercice 2

III Sens de variation

On peut donner les variations d'une fonction du second degré par son tableau de variation.

- Lorsque a est positif

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

La valeur en laquelle le minimum est atteint est $x_{min} = -\frac{b}{2a}$. Le minimum vaut l'image de x_{min} soit $f(x_{min})$.

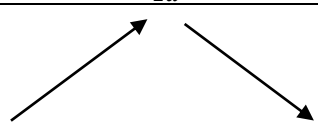
Exemple : Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$

x	$-\infty$	1,5	$+\infty$
$f(x)$			

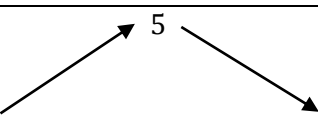
Pour compléter entièrement le tableau de variation, il faut calculer $-\frac{b}{2a} = 1,5$; $f(-1) = 5$; $f(1,5) = -1,25$ et $f(4) = 5$.

On dit alors que f admet un minimum égal à $-1,25$ pour $x = 1,5$.

- Lorsque a est négatif

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

Exemple : Soit la fonction g définie sur l'intervalle par $g(x) = -0,5x^2 + 2x + 3$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$			

Pour compléter entièrement le tableau de variation, il faut calculer $-\frac{b}{2a} = 2$; $g(-2) = -3$; $g(2) = 5$ et $g(6) = -3$.

On dit alors que g admet un maximum égal à 5 pour $x = 2$.

Application : Exercice 3

IV Signe d'une fonction du second degré

Méthode :

On veut étudier le signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x - 5)(x + 2)$

Le signe de la fonction dépend de chaque facteur soit -3 ; $x - 5$; $x + 2$

$$\begin{array}{lcl} x - 5 = 0 & \text{et} & x + 2 = 0 \\ x = 5 & & x = -2 \end{array}$$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
-3	-			-
$x - 5$	-		○	+
$x + 2$	-	○	+	+
$-3(x - 5)(x + 2)$	-	○	+	-

Application : Exercice 4