

Croissance exponentielle

I Suites géométriques

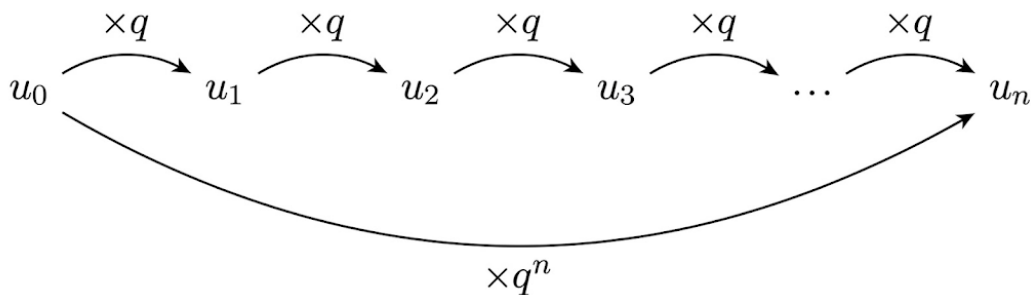
1- Définition et représentation

Définition :

Une suite (U_n) est une **suite géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n ,
 $U_{n+1} = q \times U_n$.

Le réel q est appelé **raison** de la suite géométrique.

Schématiquement, on peut représenter une suite arithmétique de la façon suivante :



Dans une suite géométrique, on passe donc d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre q .

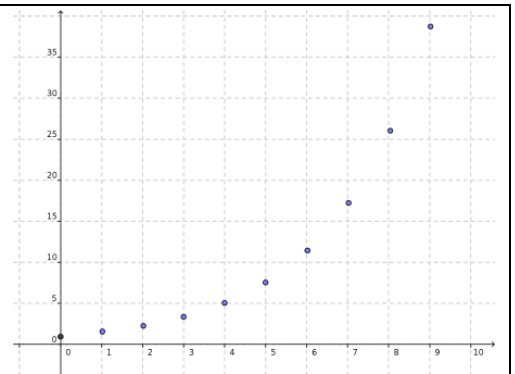
Exemple : La suite définie par $U_{n+1} = 2 \times U_n$ avec $U_0 = 1$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.
Les premiers termes de cette suite sont 1, 2, 4, 8...

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q .

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points de coordonnées $(n ; U_n)$.

Pour une suite géométrique, on parle de **croissance** (ou **décroissance**) **exponentielle**.



Application : Exercice 1

2- Sens de variation

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q .

- Si $q > 1$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (U_n) est constante.

Démonstration : La suite (U_n) étant géométrique de raison q , on peut écrire, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = q \times U_n$.

Ainsi on en déduit que $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

- Si $q > 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \Leftrightarrow U_n < U_{n+1}$. La suite (U_n) est donc croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Leftrightarrow U_{n+1} < U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante.
- Si $q = 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 \Leftrightarrow U_{n+1} = U_n$. La suite (U_n) est donc constante

Application : Exercice 2

II Fonctions exponentielles

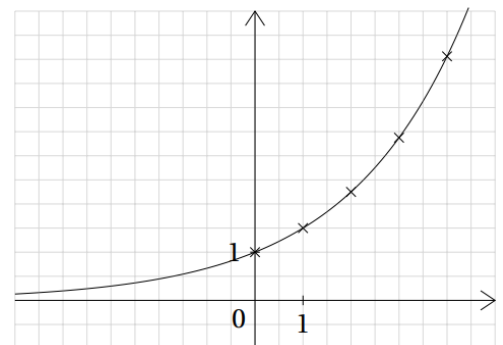
1- Définition

Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif. Définie pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle $f(x)$ une **fonction exponentielle de base a** tel que $f(x) = a^x$

Exemple : Ci-contre, la représentation graphique de la fonction $f(x) = 1,5^x$

Pour la tracer, un tableau de valeurs a été réalisé.



Propriété :

La fonction exponentielle de base a est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction est également positive sur $\mathbb{R}$.

Application : Exercice 3

2- Sens de variation

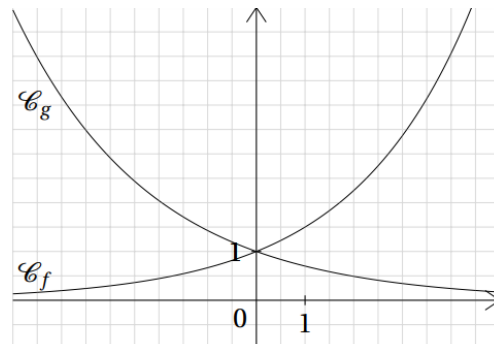
Propriété :

Une fonction exponentielle de base a avec a strictement positif est :

- strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$
- strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$
- constante sur $\mathbb{R}$ si $a = 1$

Exemple : Ci-contre, les fonctions $f(x) = 1,5^x$ et $g(x) = 0,7^x$ sont représentées.

Application : Exercice 4



3- Propriétés algébriques

Propriété :

- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$
- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^n = a^{xn}$, avec n entier positif

Application : Exercice 5

III Taux d'évolution moyen

Propriété :

Si $x^n = a$ alors $x = a^{\frac{1}{n}}$

Exemple : Entre 2023 et 2026, le prix du carburant dans une station service a augmenté de 30%. On souhaite trouver le taux d'évolution moyen annuel t . Le coefficient multiplicateur correspondant est égal à $1 + \frac{t}{100}$

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 30% sur trois ans est donc égal à :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 = 1,30 \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} = 1,30^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{t}{100} = 1,30^{\frac{1}{3}} - 1 \Leftrightarrow t = 100 \times (1,30^{\frac{1}{3}} - 1) \Leftrightarrow t \approx 9,14$$

Application : Exercice 6