

Croissance linéaire

I Fonctions affines

1- Affines, linéaires ou constantes

Exercice 1

Définition :

Une fonction affine f est une fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = ax + b$$

Le nombre a est le **coefficient directeur** (ou pente).

Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine**.

Propriétés :

Si $a = 0$ alors la fonction est **constante** et s'écrit sous la forme $f(x) = b$

Si $b = 0$ alors la fonction est **linéaire** et s'écrit sous la forme $f(x) = ax$

2- Représentation graphique

Définition :

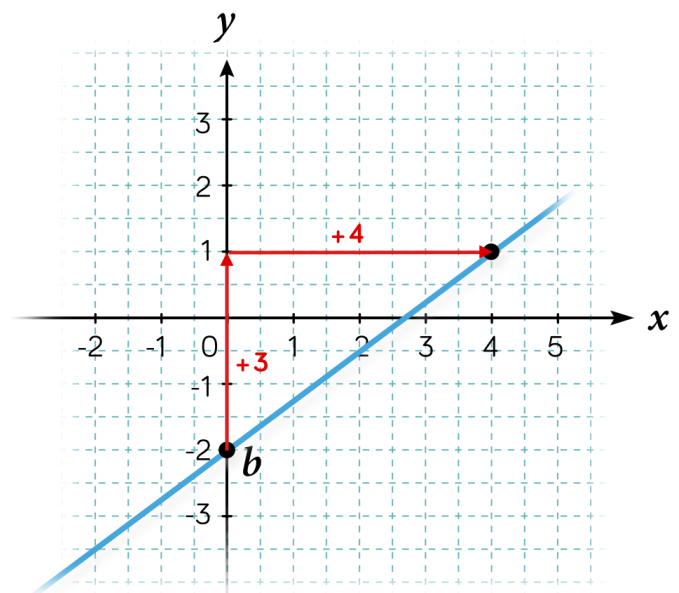
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Remarque : A partir de cette droite, on peut déterminer graphiquement les valeurs de a et de b .

Exemple : Soit f une fonction affine dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

- Pour déterminer b , il suffit de regarder le point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées. Ici, $b = -2$
- Pour déterminer a , il faut observer le nombre de carreaux dont on se déplace horizontalement et verticalement pour partir de b et arriver à un point avec des coordonnées « entières ».

$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{3}{4}$$



3- Déterminer par le calcul

Définition :

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points distincts de la droite représentative d'une fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$.

Le coefficient directeur a est égal à : $a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exemple : Soient $A(1 ; 2)$ et $B(6 ; 8)$ deux points d'une fonction affine f et d sa droite représentative.

On veut déterminer par le calcul l'expression de la fonction f .

- On commence par la valeur du coefficient directeur de la fonction f :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$a = \frac{8 - 2}{6 - 1}$$

$$a = \frac{6}{5}$$

Donc : $f(x) = \frac{6}{5}x + b$

- On peut ensuite déterminer b en remplaçant x et $f(x)$ dans l'expression de la fonction par les coordonnées d'un point appartenant à la droite d .

$$f(x_A) = \frac{6}{5}x_A + b$$

$$2 = \frac{6}{5} \times 1 + b$$

$$2 = \frac{6}{5} + b$$

$$2 - \frac{6}{5} = b$$

$$\frac{4}{5} = b$$

Donc : $f(x) = \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}$

Application : Exercice 2

Propriété :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$

- Si $a > 0$, alors f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$
- Si $a < 0$, alors f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$
- Si $a = 0$, alors f est **constante** sur $\mathbb{R}$

Application : Exercice 3

4- Signe d'une fonction affine

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = -2x + 6$

Méthode : Pour déterminer le signe d'une fonction affine

L'image par une fonction est positive quand graphiquement la droite représentative de cette fonction est au-dessus de l'axe des abscisses, et inversement.

Il faut donc d'abord déterminer pour quelle valeur de x , l'image par la fonction est égale à zéro.

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = 3$

On peut alors dresser le tableau de signes de la fonction :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f	$+$ (Signe opposé de a)	0	$-$ (Signe de a)

Application : Exercice 4

II Suites arithmétiques

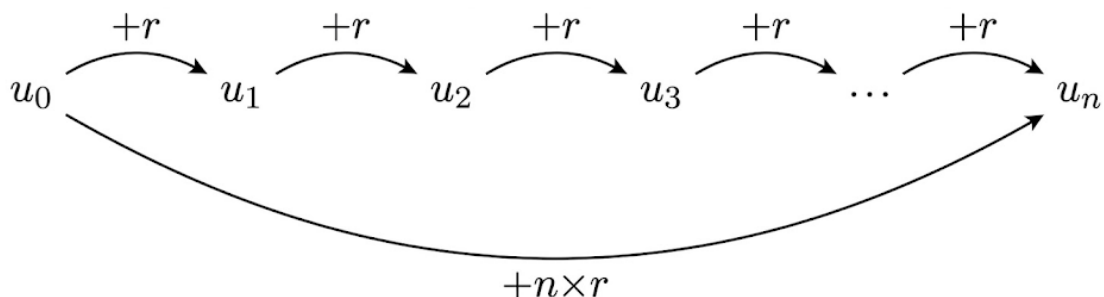
1- Définition et propriétés

Définition :

Une suite (U_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = U_n + r$.

Le réel r est appelé **raison** de la suite arithmétique.

Schématiquement, on peut représenter une suite arithmétique de la façon suivante :



Dans une suite arithmétique, on passe donc d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre r .

Exemple : La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = 0$

Propriété :

Pour passer du premier terme U_0 au terme U_n , on peut utiliser la formule :

$$U_n = U_0 + nr$$

Application : Exercice 5

Propriété :

Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et p , on a :

$$U_n = U_p + (n - p) \times r$$

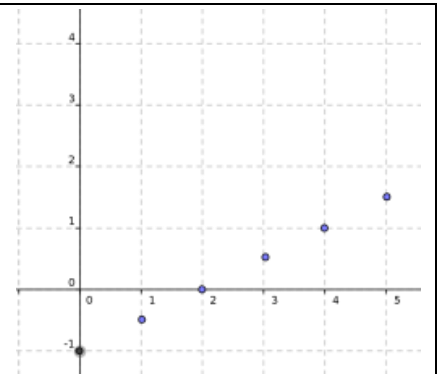
Application : Exercice 6

2- Représentation graphique

Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r .

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points alignés de coordonnées $(n ; U_n)$.



3- Sens de variation

Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (U_n) est constante.

Application : Exercice 7