Nombres réels (1ère partie)

I Ensembles de nombres

1- Définitions

L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble des **entiers positifs ou nuls** noté $\mathbb{N}$

Exemple : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ...

L'ensemble des **entiers relatifs** est l'ensemble des **entiers positifs et négatifs ou nuls** noté $\mathbb{Z}$

Exemple : -18 ; -3 ; 0 ; 1 ; 4 ...

L'ensemble des **nombres décimaux** est l'ensemble des **nombres s'écrivant sous la forme** $\frac{a}{10^n}$ avec a appartenant à $\mathbb{Z}$ et n appartenant à $\mathbb{N}$. Il est noté $\mathbb{D}$

Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exemple : $0{,}862$; $\frac{3}{4}$; 2 ; $\sqrt{0{,}01}$ ...

L'ensemble des **nombres rationnels** est l'ensemble des **nombres s'écrivant sous la forme** $\frac{a}{b}$ avec a et b appartenant à $\mathbb{Z}$ et b non nul. Il est noté $\mathbb{Q}$

Exemple : $-\frac{9}{33}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{11}{7}$ ...

Démonstration au programme :

Supposons par l'absurde que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Il existe donc un entier $a \in \mathbb{Z}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.

On en déduit que $3a = 10^n$.

Par conséquent, 10^n est un multiple de 3 (ou divisible par 3).

Or, $10^n = 100 \ldots 0$, la somme de ses chiffres est $1 + 0 + \cdots + 0 = 1$.

1 n'étant pas divisible par 3, 10^n ne peut l'être non plus.

C'est une contradiction. L'hypothèse de départ est fausse, donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

L'ensemble des **nombres irrationnels** est l'ensemble des nombres qui ne sont pas rationnels et qui ne s'écrivent pas sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b appartenant à $\mathbb{Z}$ et b non nul.

Exemple : π ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ …

L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble de tous les nombres représentant les abscisses des points d'une droite graduée (appelée droite numérique ou droite des réels) noté $\mathbb{R}$

Exemple : 0 ; $\frac{11}{7}$; $\sqrt{0{,}01}$; -3 ; $\sqrt{5}$…

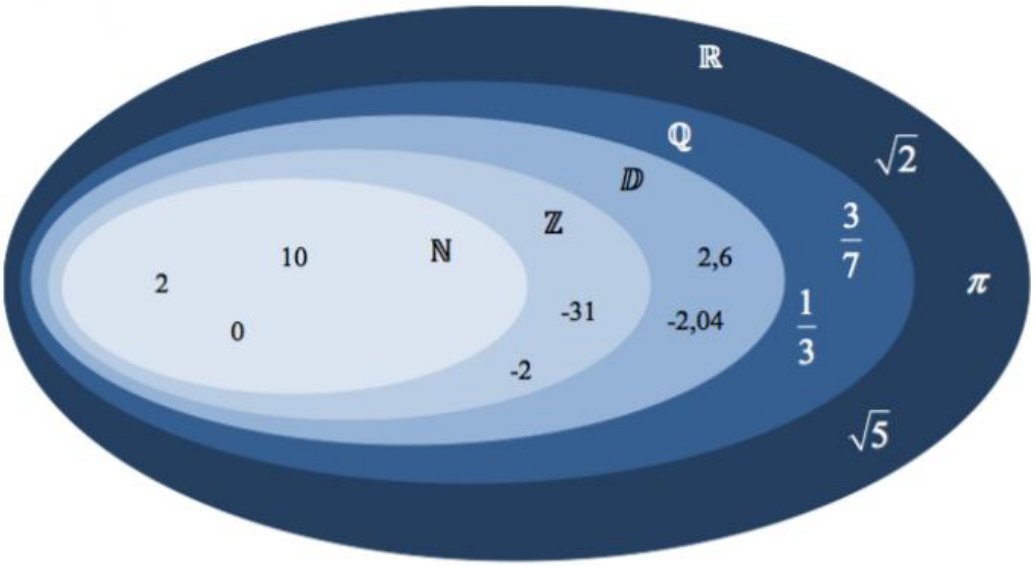
2- Classification des nombres

Les nombres entiers naturels $\mathbb{N}$ appartiennent à l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$ qui eux-mêmes appartiennent à l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$…

On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Cela signifie que $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$.

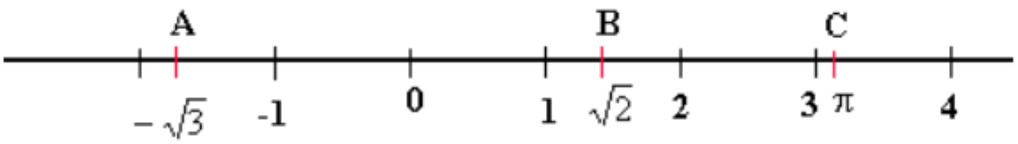
Propriété :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



3- Droite des réels

L'ensemble des nombres utilisés en seconde sont donc des réels. On considère qu'ils sont tous « mesurables ». Par conséquent, on peut représenter cet ensemble $\mathbb{R}$ par une droite graduée appelée droite des réels ou droite numérique. Tout point de cette droite a pour abscisse un nombre réel.



Ici les points A, B et C sont respectivement les points d'abscisse $-\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$ *et* π

Application : Exercices 1 et 2

II Intervalles

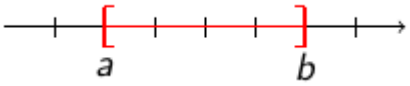
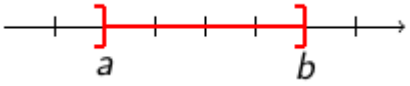
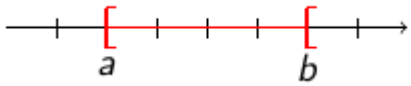
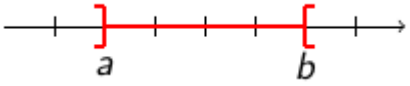
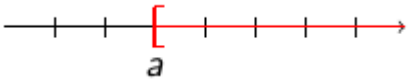
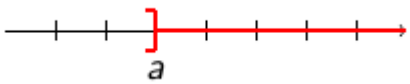
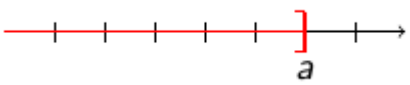
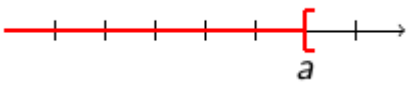
1- Notations

Définitions :

Un intervalle est dit **fermé** si ses extrémités **appartiennent** à l'intervalle.

Autrement, l'intervalle est dit **ouvert**.

Chaque intervalle peut être représenté sur une droite graduée :

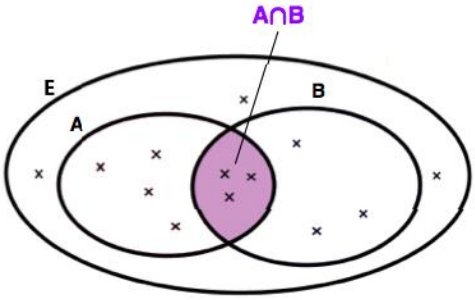
Nombres réels x	Notation	Représentation
Intervalles bornés		
$a \leq x \leq b$	$[a\,;b]$	
$a < x \leq b$	$]a\,;b]$	
$a \leq x < b$	$[a\,;b[$	
$a < x < b$	$]a\,;b[$	
Intervalles non bornés		
$x \geq a$	$[a\,;+\infty[$	
$x > a$	$]a\,;+\infty[$	
$x \leq a$	$]-\infty\,;a]$	
$x < a$	$]-\infty\,;a[$	

Remarque : L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui s'écrit $]-\infty\,;+\infty[$

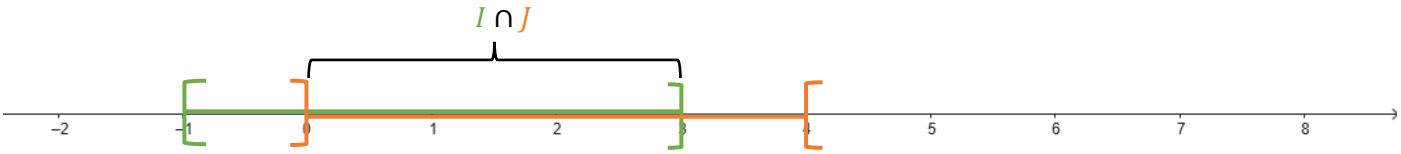
Application : Exercices 3 et 4

2- Réunion et intersection

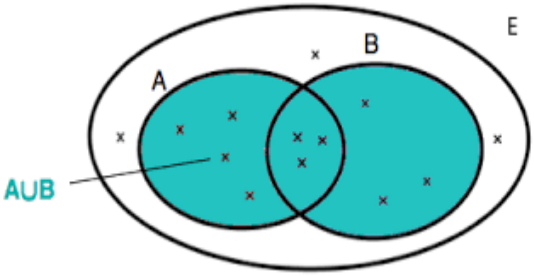
L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ET** à B. Elle est notée $A \cap B$ et se lit A inter B.



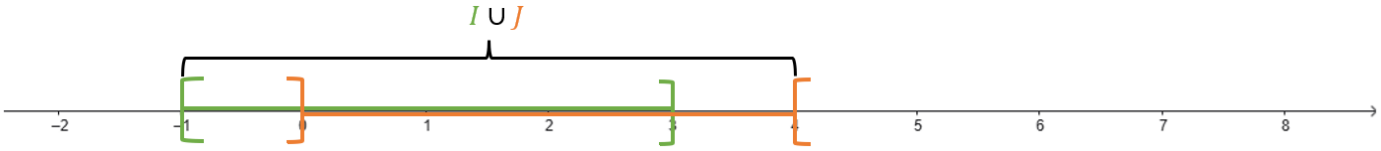
L'intersection peut aussi être représentée sur une droite graduée. Si on considère un intervalle $I = [-1\,;3]$ et un intervalle $J =]0;4[$, alors $I \cap J =]0\,;3]$



La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **OU** à B. Elle est notée $A \cup B$ et se lit A union B.



La réunion peut aussi être représentée sur une droite graduée. Si on considère un intervalle $I = [-1\,;3]$ et un intervalle $J =]0;4[$, alors $I \cup J = [-1\,;4[$



Remarque :

Si les ensembles I et J n'ont pas de « zone » en commun :

- $I \cup J = [-1\,;1] \cup]2\,;4[$
- $I \cap J = \emptyset$
- $\emptyset$ s'appelle l'ensemble vide et ne contient aucun élément.

Application : Exercices 5 et 6

3- Résolution d'inéquations

Définition :

Une **inéquation** est une **inégalité** dans laquelle un nombre inconnu est désigné par une lettre.

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à l'inconnu pour que l'inégalité soit vraie. Ces valeurs sont un ensemble généralement noté sous forme d'intervalle.

Exemples :

$$5x + 6 \leq 8 - 2x$$
$$5x + 6 + 2x \leq 8$$
$$5x + 2x \leq 8 - 6$$
$$7x \leq 2$$
$$x \leq \frac{2}{7}$$
$$S =]-\infty ; \frac{2}{7}]$$

$$-5x + 6 \leq 8 - 2x$$
$$-5x + 6 + 2x \leq 8$$
$$-5x + 2x \leq 8 - 6$$
$$-3x \leq 2$$
$$x \geq -\frac{2}{3}$$
$$S = [-\frac{2}{3} ; +\infty[$$

Application : Exercice 7

III Valeurs absolues

Définition :

On appelle valeur absolue d'un nombre réel x la distance entre x et 0. On la note $|x|$

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad |x| = -x \text{ si } x < 0$$

Soient a et b deux nombres réels. On appelle **distance** entre a et b le nombre $|a - b|$

Exemples :

- Si $x = 2$, alors $|x| = 2$
- Si $x = -5$, alors $|x| = 5$
- Si $a = 4$ et $b = -1{,}5$, alors $|4 - (-1{,}5)| = 5{,}5$

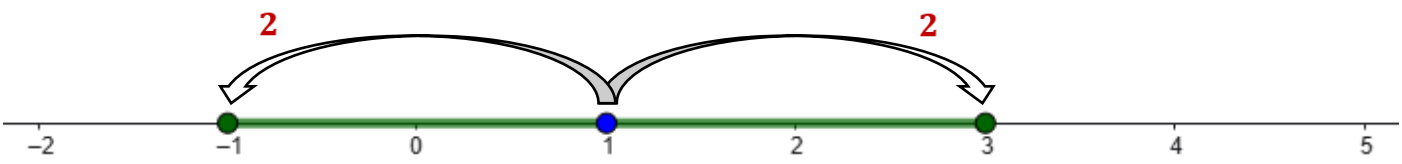
Propriété :

Soient x, a et r des nombres réels

Si $|x - a| \leq r$ alors $x \in [a - r ; a + r]$

Exemple :

On veut résoudre l'inéquation $|x - 1| \leq 2$



Ici $a = 1$ et $r = 2$.

$|x - 1| \leq 2 \Leftrightarrow x \in [1 - 2\ ;\ 1 + 2] \Leftrightarrow x \in [-1\ ;\ 3]$.

L'ensemble des solutions est $S = [-1\ ;\ 3]$.

Application : Exercice 8