

Vecteurs (2^{ème} partie)

I Norme et coordonnées du milieu

1- Norme d'un vecteur

Définition 1 :

Soient deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Démonstration

Soient deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$. On construit le point C tel que ABC soit un triangle rectangle en C .

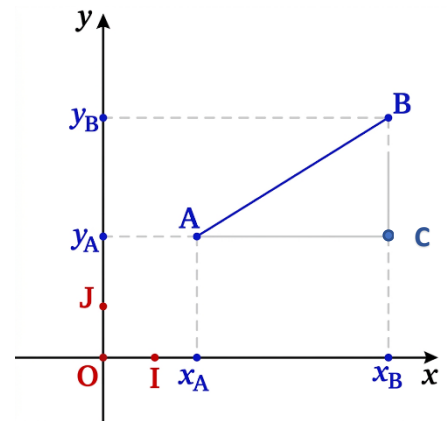
On cherche la valeur de la longueur AB

D'après le théorème de Pythagore,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



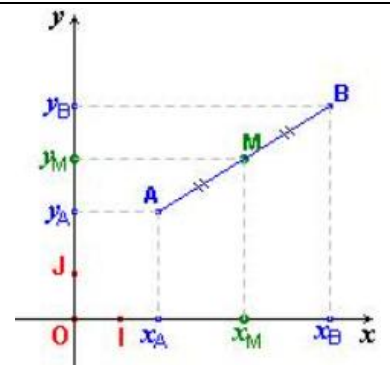
2- Coordonnées du milieu

Définition 2 :

Soient trois points $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ et $M(x_M ; y_M)$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

M est le milieu de $[AB]$ et a pour coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



Application : Exercice 1

II Colinéarité de vecteurs

1- Définitions

Définition 3 :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel λ non nul tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.
- L'homothétie de centre A et de rapport $\lambda \neq 0$ transforme le point M en M' tel que $\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}$

Propriété 1 :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.

Application : Exercice 2

2- Déterminant de deux vecteurs

Définition 4 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel $xy' - yx'$. On le note $\det(\vec{u}; \vec{v})$.

Propriété 2 :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, le déterminant est nul.

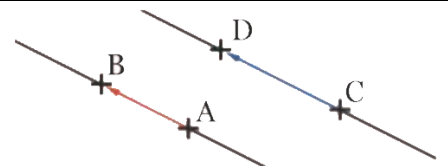
Exemple : $\vec{u} \begin{pmatrix} -9 \\ 24 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -16 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\det(\vec{u}; \vec{v}) = -9 \times (-16) - 24 \times 6 = 144 - 144 = 0$

Application : Exercice 3

3- Parallélisme

Propriété 3 :

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



Remarque : Si les droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 0$. La réciproque est également vraie.

Propriété 4 :

Soient A , B , et C trois points distincts deux à deux.

Les points A , B , et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Application : Exercices 4 et 5