Arithmétique

I Les diviseurs d'un entier

Définition :

La division euclidienne d'un nombre entier (**le dividende**) par un autre nombre entier (**le diviseur**) permet de trouver deux nombres entiers (**le quotient et le reste**) tel que :

$$dividende = (quotient \times diviseur) + reste$$

Dividende	Diviseur
...	
Reste	Quotient

Exemple :

22	5
-20	4
2	

La division entière de 22 par 5 donne un quotient de 4 et un reste de 2 :

Pour vérifier son résultat, on peut faire l'opération suivante : $Dividende = Diviseur \times Quotient + Reste$

Ici : $22 = 5 \times 4 + 2$

Définition :

Si le reste de la division euclidienne d'un entier a par un entier b est égal à 0, on dit alors que :

- a est un **multiple** de b ou b est un **diviseur** de a

- a est **divisible** par b

Exemple : Le reste de la division de 128 par 8 est égal à 0.

On dit donc que :

- 128 est **divisible** par 8
- 8 est un **diviseur** de 128
- 128 est un **multiple** de 8

Remarques :

- On ne peut pas diviser un nombre par 0
- Tout nombre est un multiple de 1
- Tout nombre entier est divisible par 1 et lui-même

Application : Exercice 1

II Les critères de divisibilité

Pour trouver rapidement les diviseurs d'un nombre entier, certains critères de divisibilité sont à connaître :

- Un nombre est divisible par 2, s'il est pair (s'il se termine par $0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8$).
  Ex : 26 ; 510 ; 1244

- Un nombre est divisible par 4, si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.
  Ex : 538924

- Un nombre est divisible par 5, s'il se termine par 0 ou 5.
  Ex : $525 ; 1000 ; 60$

- Un nombre est divisible par 10, s'il se termine par 0.
  Ex : $10 ; 520 ; 538930$

- Un nombre est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
  Ex : 369 $\quad 3+6+9=18\ (6\times 3=18)$

- Un nombre est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
  Ex : 73665 $\quad 7+3+6+6+5=27\ (9\times 3=27)$

Application : Exercice 2

III Les nombres premiers

Définition :

Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

La liste des nombres premiers inférieurs à 30 :

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$

Remarques :

- La liste des nombres premiers est infinie
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur
- 2 est le seul nombre premier pair

IV Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Propriété :

Tout nombre non premier peut se décomposer en **produit de facteurs premiers**. Cette décomposition est unique.

Exemple 1 : $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

Chaque facteur de cette décomposition est un **nombre premier**.

Exemple 2 : Soit la fraction $\frac{60}{126}$

Pour rendre cette fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

60	2		126	2
30	2		63	3
15	3		21	3
5	5		7	7
1			1	

La décomposition de 60 en produits de facteurs premiers est : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

La décomposition de 126 en produits de facteurs premiers est : $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

On a donc : $\frac{60}{126} = \frac{\cancel{2}\times2\times\cancel{3}\times5}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times3\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$

1 est le seul diviseur commun de 10 et 21

Donc $\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$

Application : Exercice 3