

Nombres réels (2^{ème} partie)

I Calcul numérique

1- Multiples et diviseurs

Définition 1 :

Soit a et b deux entiers relatifs.

Si le **reste** de la division euclidienne de a par b est **nul**, alors il existe un entier k tel que $a = kb$

Par conséquent :

- a est un **multiple** de b
- b est un **diviseur** de a
- On dit que a est **divisible** par b

Exemple : On sait que $6 \times 7 = 42$

42 est donc un multiple de 7 et 7 est un diviseur de 42 car $42 = 6 \times k$ avec $k = 7$

Propriété 1 :

La somme de deux multiples de a est un multiple de a

Exemple : 10 et 6 sont des multiples de 2 car $10 = 2 \times 5$ et $6 = 2 \times 3$

Or, $10 + 6 = 16 = 2 \times 8$ donc 16 est aussi un multiple de 2

Propriété 2 :

Un nombre entier possède un nombre fini de diviseur, mais un nombre infini de multiples.

Application : Exercice 1

2- Les critères de divisibilité

Remarque : on parle de critères de divisibilité quand le reste de la division euclidienne est nul.

- Un nombre est **divisible par 2**, s'il est pair (s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8).
Ex : 26 ; 510 ; 1244
- Un nombre est **divisible par 4**, si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.
Ex : 538924

- Un nombre est **divisible par 5**, s'il se termine par 0 ou 5.
Ex : 52**5** ; 100**0** ; 6**0**
- Un nombre est **divisible par 10**, s'il se termine par 0.
Ex : 1**0** ; 52**0** ; 53893**0**
- Un nombre est **divisible par 3**, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Ex : 369 $3 + 6 + 9 = 18$ ($6 \times 3 = 18$)
- Un nombre est **divisible par 9**, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Ex : 73665 $7 + 3 + 6 + 6 + 5 = 27$ ($9 \times 3 = 27$)

3- Nombres pairs et impairs

Définition 2 :

Les nombres entiers **pairs** sont les nombres divisibles par 2 (ou multiple de 2).

Les nombres entiers **impairs** sont les nombres qui ne sont pas divisibles par 2.

Propriété 2 :

– a est **pair** si et seulement s'il existe un entier k tel que $a = 2k$

– a est **impair** si et seulement s'il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$

Exemples :

- $124 = 2 \times k$ avec $k = 62$
- $401 = 2 \times k + 1$ avec $k = 200$

De manière générale, on a :

Parité de la somme

1 ^{er} nombre		2 ^{ème} nombre		Somme
Pair	+	Pair	=	Pair
Pair	+	Impair	=	Impair
Impair	+	Impair	=	Pair

Parité du produit

1 ^{er} nombre		2 ^{ème} nombre		Produit
Pair	×	Nombre	=	Pair
Pair	×	Impair	=	Pair

Propriété 3 :

Le carré d'un nombre impair est impair.

Application : Exercice 2

4- Nombres premiers

Définition 3 :

Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemple : 23 est un nombre premier puisqu'il n'est divisible que par 1 et 23.

Remarques :

- 1 n'est pas un nombre premier puisqu'il n'admet qu'un seul diviseur (lui-même)
- La liste des nombres premiers est infinie

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

Propriété 4 :

Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est **unique**.

Exemple : $20 = 2 \times 2 \times 5$ est une décomposition du nombre 20 en **produits de facteurs premiers**.

Cela signifie que **chaque facteur** de la décomposition est un **nombre premier**.

Application : Exercice 3

II Arithmétique

1- Identités remarquables

Propriété :

Soient a et b des nombres réels quelconques. On a alors :

$$- (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$- (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$- (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Application : Exercice 4

2- Puissances

Définition :

Exposant positif : Soient a un nombre et n un entier positif.

Le produit de a par lui-même n fois s'appelle la **puissance** n -ième de a et on le note a^n :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Exposant négatif : Si $a \neq 0$ alors

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

Exemples :

- $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

- $3^{-3} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{27}$

Propriétés :

Soient a et b deux nombres réels non nuls et soient n et m deux entiers relatifs :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$

- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

- $(a^n)^m = a^{n \times m}$

- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Application : Exercice 5

3- Racines carrées

Définition :

Soit a un nombre réel positif ou nul ($a \geq 0$).

La **racine carrée** de a , notée $\sqrt{a}$, est le seul nombre réel **positif** dont le carré est égal à a tel que :

$$\sqrt{a} \geq 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

Propriétés :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Remarque : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Démonstrations au programme :

- On a d'une part : $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$
Et d'autre part : $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$ car a et b sont positifs
Donc : $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a \times b})^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- On a d'une part : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$
Et d'autre part : $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$
Donc : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$ car $2\sqrt{ab} > 0$
Donc : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

Application : Exercice 6