

Phénomènes aléatoires

I Fréquence conditionnelle

Définition :

On appelle **fréquence (ou probabilité) conditionnelle** de A sachant B (ou parmi B), la probabilité que A soit réalisé quand B est réalisé. Elle se note $f_B(A)$ ou $P_B(A)$ et est égale à :

$$P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

Exemple : On cherche la fréquence des femmes parmi les cadres dans l'entreprise

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	56	48	104
Ouvriers	102	94	196
Total	158	142	300

La fréquence marginale des hommes et donc de $\frac{48}{104} \approx 46,2 \%$

Elle correspond à la **probabilité** d'être une femme parmi les cadres dans cette société.

Application : Exercice 1

II Indépendance de deux évènements

Définition :

On dit que deux évènements A et B de probabilité non nulle sont indépendants lorsque $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes

Soit D l'évènement : « On tire une dame »

Soit C l'évènement : « On tire un cœur »

On a $P(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $P_C(D) = \frac{1}{8}$

Les évènements C et D sont donc indépendants.

Application : Exercice 2

III Epreuve de Bernoulli

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire n'ayant que 2 issues possibles : l'une est appelée « **succès** » notée S et l'autre appelée « **échec** » notée $\bar{S}$.

Pour simplifier l'écriture, dans une épreuve de Bernoulli, on note p la probabilité de succès, donc :

$$- p(S) = p$$

$$- p(\bar{S}) = 1 - p$$

Exemple : On lance un dé non truqué à six faces et on note S l'évènement « Obtenir un 6 ».

L'évènement $\bar{S}$ est alors « Ne pas obtenir un 6 ».

C'est une épreuve de Bernoulli où $p = \frac{1}{6}$ et $p(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Application : Exercice 3

IV Schéma de Bernoulli

Définition :

On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.

Exemple : Si on effectue deux tirages successifs avec remise dans une urne, alors les deux tirages sont indépendants.

Définition :

On appelle schéma de Bernoulli la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p pour chacune d'entre elles.

Le nombre entier n et le nombre réel p sont les **paramètres** du schéma de Bernoulli.

Exemple : On lance un dé non truqué à six faces trois fois de suite et on note S l'évènement « Obtenir un 6 ». Puisque les lancers sont identiques et indépendants, c'est un schéma de Bernoulli, de paramètres $n = 3$ et $p = p(S) = \frac{1}{6}$

Méthode :

On peut modéliser un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré de probabilité en appliquant les règles suivantes :

1/ La probabilité d'un évènement représenté par un chemin de l'arbre est égale au produit des probabilités rencontrées au cours du chemin.

2/ Si un évènement est constitué de plusieurs chemins distincts de l'arbre, alors sa probabilité est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins.

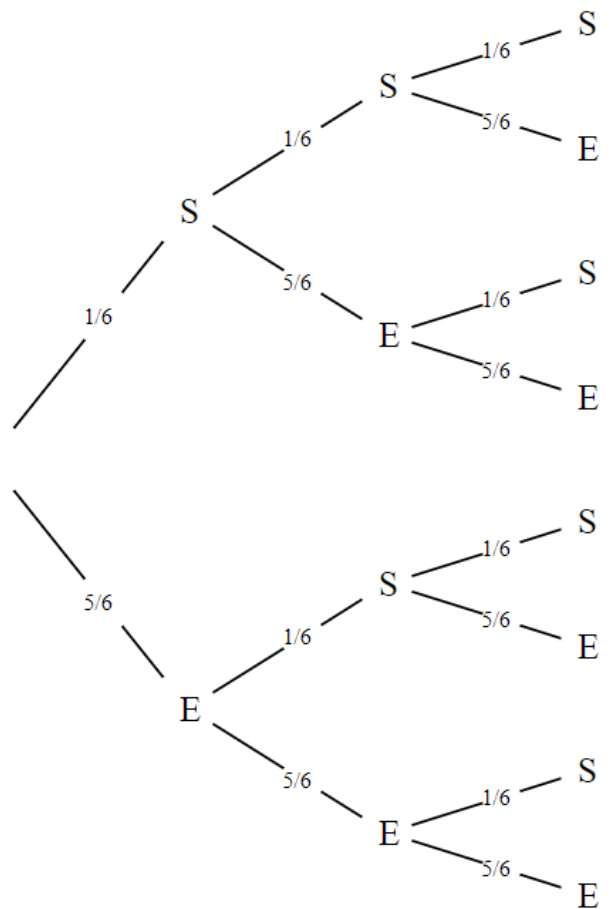
Dans l'exemple précédent, on peut réaliser l'arbre pondéré ci-contre :

1/ Si l'on cherche la probabilité de l'évènement « Obtenir 3 succès », on a $p(S/S/S) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

2/ Si l'on cherche la probabilité de l'évènement « Obtenir un succès et deux échecs », on doit d'abord calculer la probabilité d'un des chemins qui représentent cet évènement, soit $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

On constate ensuite que 3 chemins représentent cet évènement.

Il faut donc multiplier par 3 la probabilité obtenue, pour connaître la probabilité de l'évènement « Obtenir un succès et deux échecs », soit $\frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{75}{216}$



Application : Exercice 4