

Généralités sur les fonctions

I Notions de fonction

1- Définition et vocabulaire

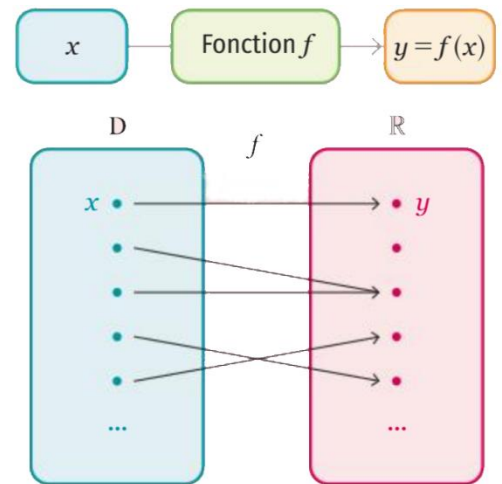
Définition :

Définir une fonction f sur un ensemble de réels D consiste à associer à chaque réel $x \in D$, un unique réel y .

On le note $y = f(x)$.

La fonction f associe à chaque élément de D un unique élément de l'ensemble d'arrivée (souvent noté $\mathbb{R}$)

On peut représenter cela par le schéma ci-contre :



Vocabulaire :

- D est appelé **ensemble de définition** de f , c'est-à-dire l'ensemble des réels x sur lesquels la fonction f associe un réel y .
- On dit que x est un **antécédent** de y par f .
- y est appelé **l'image** de x par f .

Exemple : Soit la fonction f qui exprime l'aire d'un rectangle de dimensions $L = x$ et $l = 3$.

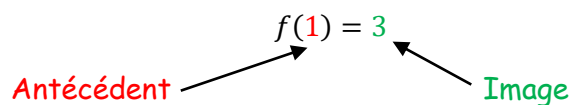
Sachant que $A_{rectangle} = L \times l$, et que $f(x)$ exprime l'aire d'un rectangle

on note $f(x) = 3x$.

2- Antécédent et image

En considérant la fonction f définie par $f(x) = 3x$, si $x = 1$ alors $f(1) = 3 \times 1 = 3$

On dit que **3** est l'image de **1** par la fonction f OU que **1** est un antécédent de **3** par la fonction f .



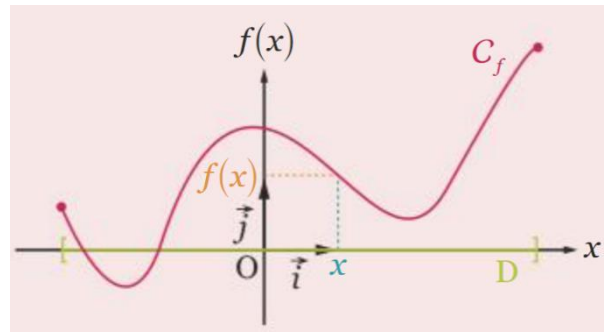
Remarque : Un antécédent ne peut avoir qu'une seule image alors qu'une image peut admettre plusieurs antécédents.

Application : Exercice 1 et 2

3- Représentation graphique

Dans un repère, on considère une fonction f définie sur D .

La **courbe représentative de la fonction f** , notée C_f , est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, pour x parcourant l'ensemble D .



Application : Exercice 3

4- Parité

Découverte : Exercice 4

Définition :

On dit qu'une fonction est **paire** si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Définition :

On dit qu'une fonction est **impaire** si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

II Résolution graphique d'équations...

1- ... du type $f(x) = k$

Définition :

Soient f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel.

Résoudre l'équation $f(x) = k$ consiste à déterminer tous les réels x appartenant à D qui ont pour image k . En d'autres termes, on détermine l'ensemble des antécédents de k par f .

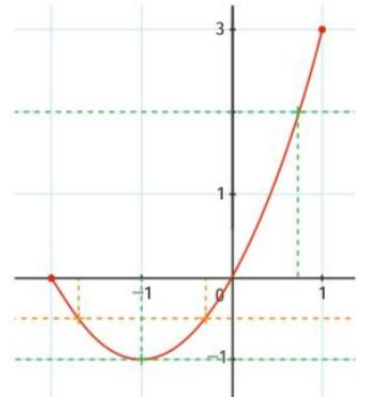
Graphiquement, les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses de tous les points de la courbe représentative de f ayant pour ordonnée k .

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $[-2 ; 1]$.

L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution $x = -1$

L'équation $f(x) = -0,5$ admet deux solutions (approximativement -1.7 et 0.3)



Application : Exercice 5 question 1

2- ... du type $f(x) = g(x)$

Définition :

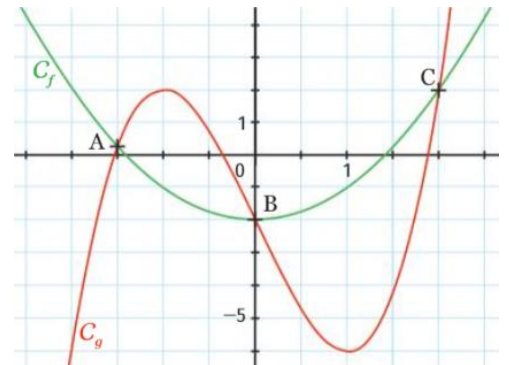
Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D .

Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ consiste à déterminer tous les réels x appartenant à D qui ont la même image par f et par g

Graphiquement, les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et de g .

Exemple :

On considère les deux représentations graphiques ci-contre pour les fonctions f et g . On constate que les deux courbes admettent 3 points d'intersection A , B et C , d'abscisses respectives -1.5 ; 0 et 2 . L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est donc $S = \{-1.5 ; 0 ; 2\}$



Application : Exercice 5 question 2

III Résolution algébrique d'équations

1- Equation du 1^{er} degré

Définition :

Une **équation** à une inconnue est une **égalité** dans laquelle un nombre inconnu est désigné par une lettre.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à l'inconnu pour que l'égalité soit vraie. Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'équation.

Méthode de résolution :

On applique des opérations successives aux deux membres de l'équation dans le but d'isoler l'inconnue d'un côté. On obtient ainsi la valeur de l'inconnue.

Exemple :

$$5x + 6 = 8 - 2x$$

$$5x + 6 + 2x = 8$$

$$5x + 2x = 8 - 6$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

2- Produit de facteurs nuls

Propriété :

Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

Si un produit de facteurs est nul, alors au moins l'un des deux facteurs est nul.

Exemple :

$$(4x + 6)(5 - 2x) = 0$$

Si un produit de facteurs est nul, alors au moins l'un des deux facteurs est nul.

$$4x + 6 = 0$$

ou

$$5 - 2x = 0$$

$$4x = -6$$

ou

$$5 = 2x$$

$$x = -\frac{6}{4}$$

ou

$$\frac{5}{2} = x$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

ou

$$\frac{5}{2} = x$$

3- Equation du type $x^2 = a$

Propriété :

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a .

Si $a < 0$ alors il n'y a pas de solution.

Si $a = 0$ alors l'équation admet une solution $x = 0$.

Si $a > 0$ alors $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Exemple :

$x^2 = 16$ admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ ou $x = -\sqrt{16} = -4$

Application : Exercice 6

IV Résolution graphique d'inéquations

1- Graphiquement

Définition :

Résoudre l'inéquation $f(x) \geq k$ consiste à déterminer l'ensemble de tous les réels x appartenant à D dont l'image est supérieure ou égale à k .

Graphiquement, les solutions de $f(x) \geq k$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est supérieure ou égale à k .

Exemple :

$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \in [-0,7; 1] \cup [2,7; +\infty[$$

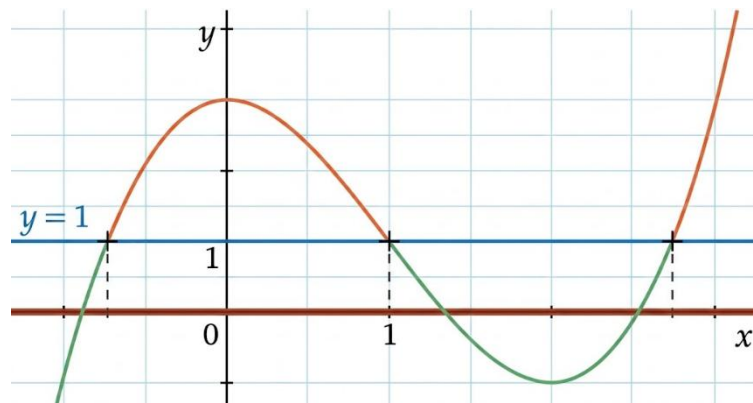
$$f(x) > 1 \Leftrightarrow x \in]-0,7; 1[\cup]2,7; +\infty[$$

$$f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -0,7] \cup [1; 2,7]$$

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -0,7[\cup]1; 2,7[$$

En rouge

En vert



Application : Exercice 7

Définition :

Résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ consiste à déterminer l'ensemble de tous les réels x appartenant à D dont l'image par f est supérieure ou égale à l'image par g .

Graphiquement, les solutions de $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés au-dessus des points de la courbe représentative de g .

Exemple :

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1,5] \cup [0; 2]$$

En

rouge

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1,5[\cup]0; 2[$$

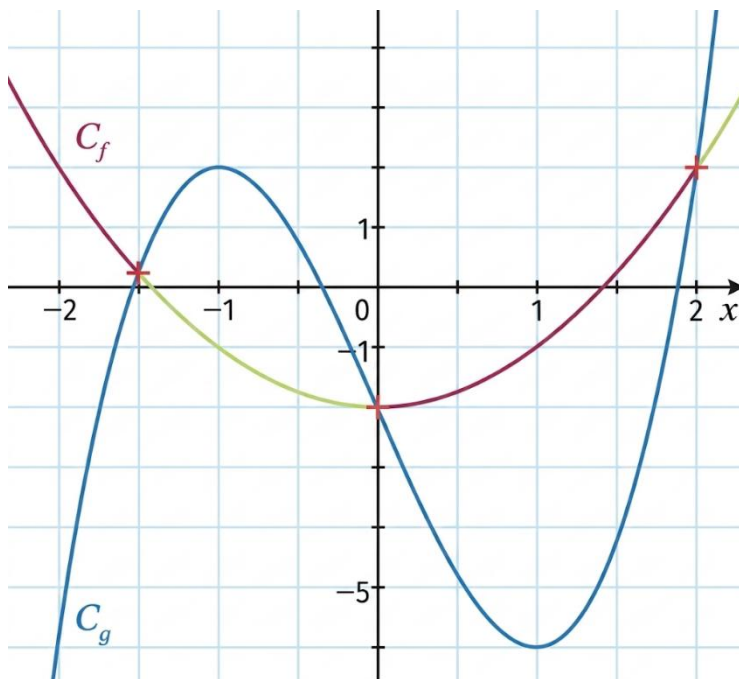
$$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in [-1,5; 0] \cup [2; +\infty[$$

En

vert

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]-1,5; 0[\cup]2; +\infty[$$

Application : Exercice 8



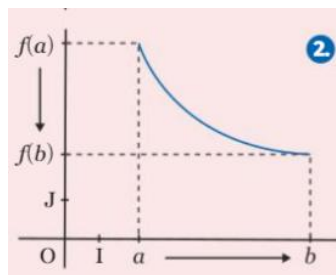
V Variations d'une fonction

1- Monotonie

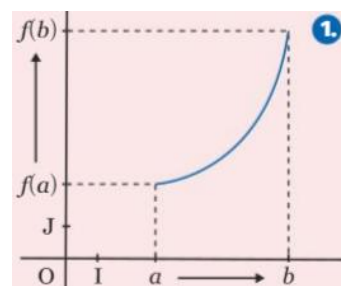
Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

– f est dite **croissante** sur I lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a : $f(a) \leq f(b)$



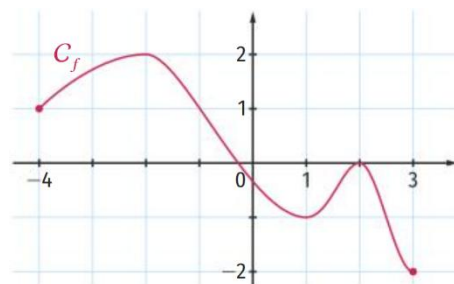
– f est dite **décroissante** sur I lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a : $f(a) \geq f(b)$



Remarques : f est dite monotone sur I quand elle est soit croissante, soit décroissante sur I .

2- Tableau de variations

Soit f une fonction dont la courbe représentative est celle ci-contre. On veut dresser le tableau de variations de cette fonction.



Méthode :

- 1- On repère visuellement les coordonnées des points aux bornes de l'ensemble de définition (en vert).
- 2- On repère visuellement les « points de rupture » c'est-à-dire les coordonnées des points pour lesquels la courbe change de variation (en rouge).
- 3- On place entre chaque point les flèches correspondantes à la variation observée sur le graphique.

x	-4	-2	1	2	3
f	1	2	-1	0	-2

Remarque : En connaissant la monotonie d'une fonction sur un intervalle, on peut comparer les images entre elles.

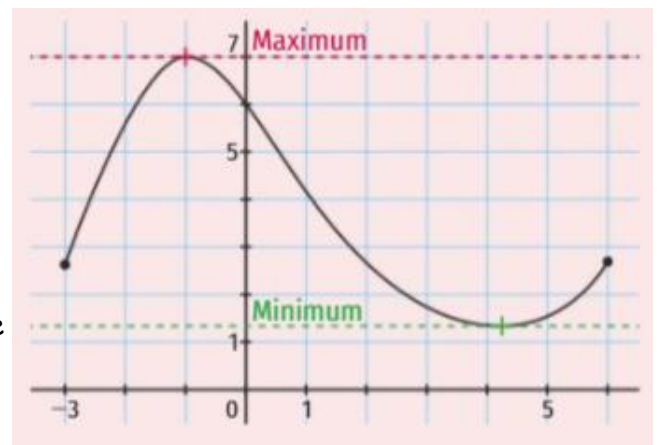
Application : Exercice 9 question 1

3- Extremums

Définition :

- On dit que f admet un minimum sur l'intervalle I quand pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$, m étant la plus petite image de x par f .
- On dit que f admet un maximum sur l'intervalle I quand pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$, M étant la plus grande image de x par f .

Le minimum et le maximum sont appelés extremums.



Application : Exercice 9 question 2

4- Liens avec les fonctions affines

Rappels :

- Une fonction affine est une fonction qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = mx + p$ avec m et p deux nombres réels quelconques.
- Le coefficient directeur se calcule grâce à la formule $m = \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$ avec a et b deux réels distincts.

Propriété :

Le signe du coefficient directeur de la droite représentative d'une fonction affine indique la variation de cette dernière sur l'intervalle I .

Si m est positif, alors f est croissante sur l'intervalle I

Si m est négatif, alors f est décroissante sur l'intervalle I .

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x + 4$ sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$

On a : $m = 2$. Le coefficient directeur est positif.

Donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.