

Variables aléatoires

I Epreuve de Bernoulli

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire n'ayant que 2 issues possibles : l'une est appelée « **succès** » notée S et l'autre appelée « **échec** » notée $\bar{S}$.

Pour simplifier l'écriture, dans une épreuve de Bernoulli, on note p la probabilité de succès, donc :

$$- p(S) = p$$

$$- p(\bar{S}) = 1 - p$$

Exemple : On lance un dé non truqué à six faces et on note S l'évènement « Obtenir un 6 ».

L'évènement $\bar{S}$ est alors « Ne pas obtenir un 6 ».

C'est une épreuve de Bernoulli où $p = \frac{1}{6}$ et $p(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Application : Exercice 1

II Schéma de Bernoulli

Définition :

On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.

Exemple : Si on effectue deux tirages successifs avec remise dans une urne, alors les deux tirages sont indépendants.

Définition :

On appelle schéma de Bernoulli la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p pour chacune d'entre elles.

Le nombre entier n et le nombre réel p sont les **paramètres** du schéma de Bernoulli.

Exemple : On lance un dé non truqué à six faces trois fois de suite et on note S l'évènement « Obtenir un 6 ». Puisque les lancers sont identiques et indépendants, c'est un schéma de Bernoulli, de paramètres $n = 3$ et $p = p(S) = \frac{1}{6}$

Méthode :

On peut modéliser un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré de probabilité en appliquant les règles suivantes :

1/ La probabilité d'un évènement représenté par un chemin de l'arbre est égale au produit des probabilités rencontrées au cours du chemin.

2/ Si un évènement est constitué de plusieurs chemins distincts de l'arbre, alors sa probabilité est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins.

Dans l'exemple précédent, on peut réaliser l'arbre

pondéré ci-contre :

1/ Si l'on cherche la probabilité de l'évènement

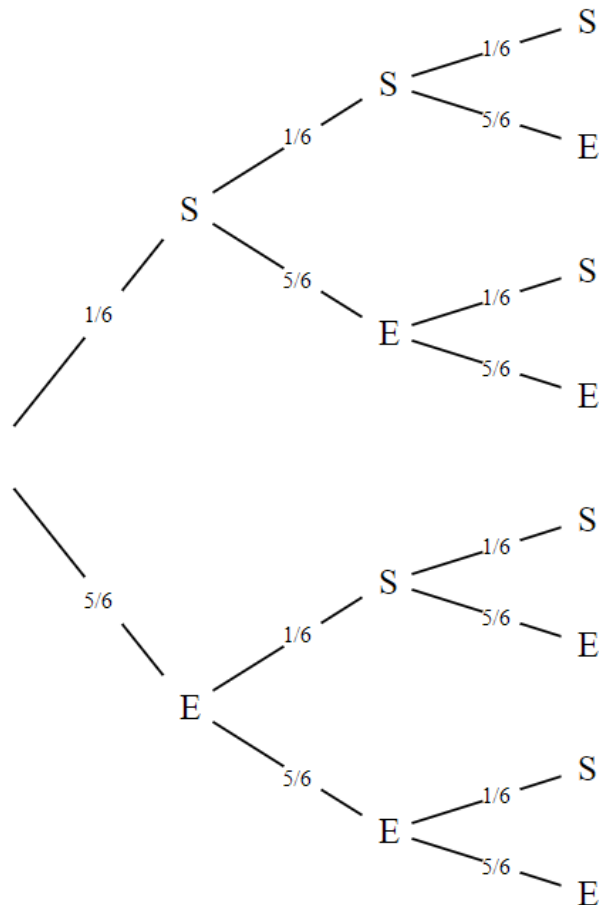
« Obtenir 3 succès », on a $p(S/S/S) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

2/ Si l'on cherche la probabilité de l'évènement

« Obtenir un succès et deux échecs », on doit d'abord calculer la probabilité d'un des chemins qui représentent cet évènement, soit $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

On constate ensuite que 3 chemins représentent cet évènement.

Il faut donc multiplier par 3 la probabilité obtenue, pour connaître la probabilité de l'évènement « Obtenir un succès et deux échecs », soit $\frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{75}{216}$



Application : Exercice 2

III Variables aléatoires

1- Définition

Définition :

Une **variable aléatoire** X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers E .

Exemple : Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat ».

L'ensemble de toutes les issues possibles $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur E qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -4 :

- Pour les issues 2, 4 ou 6, on a $X = 2$.
- Pour l'issue 1, on a $X = 3$.
- Pour les issues 3 et 5, on a $X = -4$.

Application : Exercice 3

2- Loi de probabilité

Définition :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent. Chaque issue du lancer de dé est équiprobable (même probabilité) et est égale à $\frac{1}{6}$.

On note donc :

- $P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- $P(X = 3) = \frac{1}{6}$
- $P(X = -4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	-4	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Remarque : $P(X = x_i)$ peut se noter p_i

3- Espérance

Définition :

L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n$$

Exemple : En reprenant la loi de probabilité de l'exemple précédent,

$$E(X) = \frac{1}{3} \times (-4) + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{6}$$

Remarque : L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Application : Exercice 4