Fractions

I Nombres rationnels

1- Définition

Définition :

Tout nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction est appelé **nombre rationnel**.

Exemple : $-\frac{5}{17}$ est un nombre rationnel. $5{,}6$ est aussi un nombre rationnel puisque $5{,}6 = \frac{56}{10}$

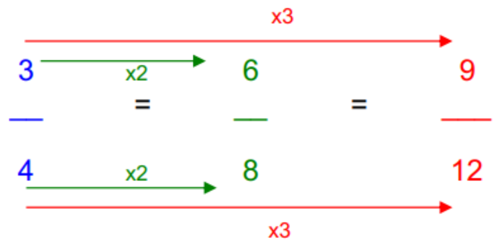
2- Egalité de fractions

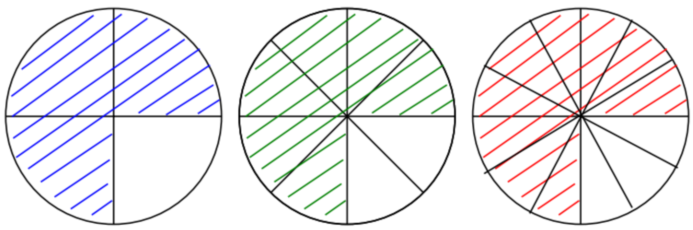
Propriété :

Une fraction ne change pas si on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre.

Exemple : Les parties bleue, verte et rouge représentent la même surface.

Les fractions sont donc égales : $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$





Remarque : On peut également diviser le numérateur et le dénominateur par le même nombre pour obtenir une fraction égale. Cela permet de simplifier une fraction.

Propriété :

Soit a, b, c et d quatre nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$

- Réciproquement, si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemple : $3 \times 10 = 30$ et $5 \times 6 = 30$ donc $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$

Application : Exercices 1 et 2

II Mettre au même dénominateur

Pour comparer des fractions entre elles, il faut d'abord qu'elles aient le même dénominateur pour ensuite comparer leurs numérateurs.

Méthode : Mettre au même dénominateur des fractions

1/ $\frac{5}{6}$ et $\frac{5}{18}$ On **multiplie** par 3 le numérateur et le dénominateur de la 1ère fraction : $\frac{5}{6}=\frac{5\times 3}{6\times 3}=\frac{15}{18}$

On peut maintenant comparer les numérateurs des deux fractions : $\frac{15}{18}>\frac{5}{18}$

2/ $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{35}$ On **divise** par 5 le numérateur et le dénominateur de la 2ème fraction : $\frac{5}{35}=\frac{5\div 5}{35\div 5}=\frac{1}{7}$

On peut maintenant comparer les numérateurs des deux fractions : $\frac{4}{7}>\frac{1}{7}$

Application : Exercice 3

III Additions et soustractions de fractions

On ne peut pas additionner ou soustraire des fractions qui n'ont pas le même dénominateur.

Méthode :

1ère étape : Il faut donc d'abord les mettre au même dénominateur.

Addition :	Soustraction :
$\frac{4}{5}+\frac{9}{25}=$ $\frac{4\times 5}{5\times 5}+\frac{9}{25}=$ $\frac{20}{25}+\frac{9}{25}=$	$\frac{5}{3}-\frac{8}{9}=$ $\frac{5\times 3}{3\times 3}-\frac{8}{9}=$ $\frac{15}{9}-\frac{8}{9}=$

2ème étape : On peut additionner ou soustraire les numérateurs entre eux et on garde le même dénominateur.

Addition :	Soustraction :
$\frac{20}{25}+\frac{9}{25}=\frac{29}{25}$	$\frac{15}{9}-\frac{8}{9}=\frac{7}{9}$

Application : Exercice 4

IV Simplifier une fraction à l'aide des nombres premiers

Définition :

Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Liste des nombres premiers :

$2\,;\,3\,;\,5\,;\,7\,;\,11\,;\,13\,;\,17\,;\,19\,;\,23\,;\,29\,;\,31\,;\,37\,;\,41\,;\,47\,;\,53\ldots$

Remarque : La liste des nombres premiers est infinie.

Propriété :

Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique et permet de simplifier les fractions

Exemple : Soit la fraction $\frac{60}{126}$

Pour rendre cette fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

60	2		126	2
30	2		63	3
15	3		21	3
5	5		7	7
1			1	

La décomposition de 60 en produits de facteurs premiers est : $60\ =\ 2\times2\times3\times5$

La décomposition de 126 en produits de facteurs premiers est : $126 = 2\times3\times3\times7$

On a donc : $\frac{60}{126} = \frac{\cancel{2}\times2\times\cancel{3}\times5}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times3\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$

1 est le seul diviseur commun de 10 et 21

Donc $\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$

Application : Exercice 5

V Multiplication de fractions

Propriété :

Pour multiplier deux fractions entre elles, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple : $\frac{2}{3}\times\frac{-4}{5} = \frac{2\times(-4)}{3\times5} = \frac{-8}{15}$

Remarque : Dans un énoncé, le mot « de » (ou « d' ») est une indication pour utiliser la multiplication. Si on demande $\frac{3}{5}$ de $\frac{7}{4}$ alors il faut faire $\frac{3}{5}\times\frac{7}{4}$

Application : Exercice 6

VI Division de fractions

1- Inverse

Définition :

Deux nombres non nuls sont dits **inverses** l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.

Exemple : $2 \times 0{,}5 = 1$ donc 2 est l'inverse de $0{,}5$

Propriétés :

Soit a et b deux nombres relatifs non nuls :

- L'inverse du nombre a est le nombre $\frac{1}{a}$

- L'inverse du nombre $\frac{a}{b}$ est le nombre $\frac{b}{a}$

Exemple : L'inverse de $\frac{2}{-7}$ est le nombre $\frac{-7}{2}$

Remarque :

- 1 est son propre inverse.
- -1 est son propre inverse
- 0 est le seul nombre qui n'a pas d'inverse.

2- Division de nombres rationnels

Propriété :

Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.

Autrement dit, si $a, b, c, et\ d$ sont quatre nombres relatifs avec $b \neq 0\,; c \neq 0\ et\ d \neq 0$ alors :

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{d}{c}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Exemple : $\frac{-4}{9} \div \frac{3}{-2} = \frac{\frac{-4}{9}}{\frac{3}{-2}} = \frac{-4}{9} \times \frac{-2}{3} = \frac{-4 \times (-2)}{9 \times 3} = \frac{8}{27}$

Application : Exercice 7